Übungen zu Mathematik III
Blatt 3

Aufgabe 1: Geben Sie für die folgenden Kurven jeweils eine Parametrisierung, den Parameterbereich und den Tangentenvektor an:

a) Parabel mit der Gleichung $y = 4x^2$, $x > 0$.

b) Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung, Radius R, der im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

c) Kreis mit Mittelpunkt $M = (1, 2)$, Radius $r = 2$, der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

d) Gerade durch den Ursprung mit der Steigung m.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass ein Wegintegral zum Kraftfeld

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

wegunabhängig ist. Welche mathematisch und physikalische Bedeutung hat diese Eigenschaft?

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Arbeit, die Sie leisten müssen, wenn Sie im Kraftfeld

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

auf dem in Abb. 2 eingezeichneten Weg von $A = (1, 1)$ nach $B = (3, 0)$ laufen.

Aufgabe 4: Wir betrachten das folgende Vektorfeld:

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -2x_2x_3 \\ 3x_1x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Potential und überprüfen Sie anschließend, indem Sie den Gradienten des ermittelten Potentials berechnen, ob dieses Potential korrekt ist.

Aufgabe 5: Wir betrachten das folgende Vektorfeld:

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $\vec{F}$ ein Potential besitzt und bestimmen Sie dieses bzgl. des Ursprungs. Überprüfen Sie ihre Rechnung, indem Sie den Gradienten bilden.

Aufgabe 6: Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{F}$ konservativ ist.

b) Wir wollen überprüfen, dass das Wegintegral über geschlossene Kurven verschwindet. Integrieren Sie daher $\vec{F}$ über den Einheitskreis.

c) Bestimmen Sie das zugehörige Potential.

d) Integrieren Sie das Vektorfeld über die Ellipse mit der folgenden Parametrisierung:

$$\gamma(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] .$$

Hinweis: Das folgende Integral könnte nützlich sein:

$$\int \cos\varphi \, \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{2}\cos^2\varphi .$$

Aufgabe 7: Wir betrachten das konservative Vektorfeld

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen das Wegintegral vom Urspung bis zum Punkt $A = (1\,,\,0)$ auf unterschiedlichen Wegen bestimmen:

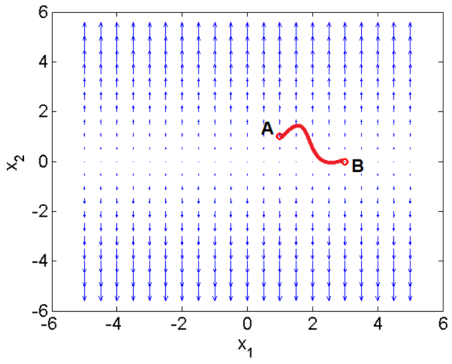


Abbildung 1: Vorgegebener Weg zu Aufgabe 3.

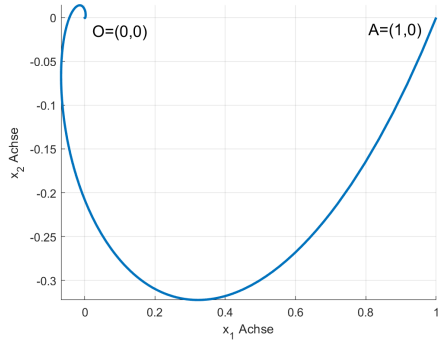


Abbildung 2: Vorgegebener Weg (log. Spirale) zu Aufgabe 7.

a) Die logarithmische Spirale vom Ursprung bis A (vgl. Abb. 2), die parametrisiert wird durch:

$$\gamma(\varphi) := e^{\varphi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [-\infty, 0] \,.$$

b) Die Gerade vom Ursprung bis A.

Hinweis: Das folgende Integral könnte nützlich sein:

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x \left(\cos x + \sin x\right) \,.$$